LARS E O SVENSSON

Om skattning av terminsräntor. Svar till Tönu Puu*

I en tidigare artikel i *Ekonomisk Debatt* (Svensson [1993b]) har jag diskuterat hur s k implicita terminsräntor kan användas som en indikator på marknadsförväntningar om framtida räntor, inflationstakt och växelkurs. Bakgrunden till den artikeln var det nya behov av penningpolitiska indikatorer som uppstått i Sverige i och med att kronan numera flyter. Terminsräntor utnyttjas redan som penningpolitiska indikatorer av centralbankerna i t ex Storbritannien och USA (Bank of England [1993a,b] och Reinhart [1992]). Oberoende av användningen som penningpolitiska indikatorer har terminsräntor och s k nollkupongsräntor under många år utnyttjats som ett standardverktyg av aktörer på den finansiella marknaden vid investeringsanalys och prissättning av obligationer och andra finansiella instrument.

Hur terminsräntor kan beräknas berördes endast i förbigående i min artikel, och den beräkningsmetod som användes där är mycket rudimentär. Att beräkna terminsräntor utifrån räntor på s k nollkupongobligationer är enkelt, medan det kan vara betydligt svårare utifrån räntor på kupongobligationer. Eftersom terminsräntor potentiellt är så användbara, medan beräkningsmetoderna hittills bara är kända av specialister, kan det vara befogat att kortfattat redogöra för några olika beräknings- och skattningsmetoder. En sådan redogörelse utgör också ett svar till Tönu Puus kritiska kommentar till min artikel (Puu [1993]). Tönu Puu framför kritik på två punkter. För det första påpekar han att beräkningar av terminsräntor blir felaktiga om kupongräntan felaktigt antas vara lika med obligationens effektiva ränta. För det andra framför han tvivel på den metod att beräkna terminsräntor med hjälp av s k duration som jag använt i min artikel. Beträffande den första punkten har Tönu Puu givetvis rätt. Kritiken drabbar dock inte mina beräkningar av svenska terminsräntor där faktiska kupongräntor använts. Dessutom tycks, som vi skall se, det fel som kan uppstå vara litet med realistiska kupongräntor och effektiva räntor. Beträffande den

LARS E O SVENSSON är professor i internationell ekonomi vid Institutet för internationell ekonomi, Stockholms universitet. Hans forskning har under senare år främst rört internationell finansiell ekonomi, penning- och valutapolitik, samt penning- och valutapolitikens trovärdighetsproblem.

* Denna not bygger på Svensson [1993a]. Se detta arbete för en utförligare redogörelse och diskussion. Jag är tacksam for diskussioner med David Barr (Bank of England), Magnus Dahlquist, Bernard Dumas (HEC, Paris), Svante Johansson (Carnegie Fondkommission AB), Mervyn King (Bank of England), Lars Jonung, Harald Lang, Hans Lindberg, Tönu Puu, Giovanni Majnoni (Banca D'Italia), Peter Norman (Alfred Berg Transferator AB), Mats Persson och Vincent Reinhart (Board of Governors, Federal Reserve System). Jag vill särskilt tacka Svante Johansson som visat mig hur terminsräntor kan skattas med en funktionsform som härleds i Longstaff & Schwartz [1992].

andra punkten har Tönu Puu en viktig poäng så tillvida att durationsmetoden innebär en ganska grov approximation.[1] Det finns betydligt mer precisa metoder att beräkna terminsräntor, som vi skall se. En av dessa metoder härleds i Tönu Puus doktorsavhandling (Puu [1964]).

Problemet

För nollkupongobligationer, dvs obligationer som inte ger några kupongutbetalningar utan förfaller med ett enda inlösenbelopp (t ex statsskuldväxlar), är det lätt att beräkna den exakta terminsräntan. Av historiska och tämligen irrationella skäl finns statliga nollkupongobligationer (statsskuldväxlar) endast för upp till ett års löptid. För längre löptider finns bara kupongobligationer, dvs obligationer som betalar en kupongränta varje år inklusive det år då inlösenbeloppet förfaller. Detta försvårar beräkningar av terminsräntor.

Det problem vi ställs inför är att med kännedom om kupongobligationers kuponger och antingen deras priser eller deras effektiva räntor beräkna *implicita* terminsräntor. I det följande skall jag kort nämna några olika metoder för skattning av terminsräntor, nämligen (1) den "okorrigerade" metoden, (2) durations-metoden, (3) den rekursiva metoden med interpolation, och (4) metoden med direkt skattning av den s k diskonteringsfunktionen som beskriver nollkupongobligationernas priser.

Den okorrigerade metoden

Som nämnts är det lätt att beräkna terminsräntor ur nollkupongräntor. Därför är det frestande att på olika sätt approximera kupongobligationer med nollkupongobligationer och sedan beräkna terminsräntor utifrån dessa approximativa nollkupongobligationer. Den allra enklaste metoden är att helt enkelt approximera kupongobligationer med nollkupongobligationer med samma löptid och effektiv ränta. Låt mig kalla terminsräntor beräknade enligt denna metod för "okorrigerade" terminsräntor.

Metoden tycks innebära en ganska grov approximation. Man kan visa att metoden underskattar terminsräntorna vid en uppåtlutande avkastningskurva medan den överskattar terminsräntorna vid en nedåtlutande avkastningskurva.

Durationsmetoden

En kupongobligation kan uppfattas som en portfölj av nollkupongobligationer, där varje kupongbetalning motsvaras av en nollkupongobligation med motsvarande löptid och inlösenbelopp. Portföljens genomsnittliga löptid blir förstås kortare än kupongobligationens löptid, eftersom kupongerna betalas ut tidigare. Den okorrigerade metoden innebär således att löptiden för de approximativa nollkupongobligationerna systematiskt överskattas. Då kan det förefalla lämpligt att istället approximera kupongobligationen med en nollkupongobligation som har en löptid lika med kupongobligationens genomsnittliga löptid, den s k durationen. Intuitivt förefaller denna metod bättre än den okorrigerade metoden. Det är också denna metod som presenteras i Shillers [1990] omfattande översikt, och det är denna metod som jag använt mig av i Svensson [1993b].

Den rekursiva metoden med interpolation

I det speciella fall när det finns kupongobligationer som förfaller med precis ett års mellanrum går det att beräkna exakta terminsräntor. Metoden beskrivs i läroböcker i finansiell ekonomi och investeringsanalys (t ex Elton & Gruber [1991,

---

[1] Det räkneexempel med duration som Tönu Puu utnyttjar i sin kritiska kommentar synes dock vara orimligt och meningslöst.

kap 18], Haugen [1993, kap 13], Viotti & Wissén [1991, kap 3]) och kallas ibland den rekursiva metoden. Den tidigaste härledning jag sett i litteraturen finns i Tönu Puus doktorsavhandling som endast publicerats på svenska (Puu [1964]). Den tidigaste härledning jag sett på engelska finns i Weingartner [1966].[2]

Den rekursiva metoden skulle vara lätt att tillämpa *om* det var så att verklighetens kupongobligationer alltid förfaller på samma dag varje år. Så är det tyvärr inte. I Sverige har Riksgäldskontoret emitterat ett fåtal standardobligationer som förfaller med i vissa fall flera års mellanrum (och dessutom på olika dagar av året). Detta gör det nödvändigt att använda andra metoder än den rekursiva vid praktiska skattningar.

En möjlig utväg är att med interpolation av den faktiska avkastningskurvan konstruera hypotetiska kupongobligationer som förfaller med precis ett års mellanrum. Den rekursiva metoden kräver emellertid att kupongerna är kända. Hypotetiska kuponger måste således konstrueras för de hypotetiska obligationerna. Detta lämnar uttrymme för ett visst godtycke. En möjlighet är att anta att de hypotetiska obligationerna är s k parobligationer, dvs att priset är lika med inlösenbeloppet, vilket är fallet om de hypotetiska kupongerna överensstämmer med den interpolerade effektiva räntan. Detta är en approximation som kan introducera ett visst fel, som bör uppskattas. (Det är detta fel som Tönu Puu [1993] diskuterar i sin första punkt.) En av flera andra möjligheter är att konstruera hypotetiska kuponger genom interpolation av faktiska kuponger.

En Monte-Carlo-studie (Buono, Gregory-Allen & Yaari [1992]) av några olika metoder att skatta terminsräntor har visat att den rekursiva metoden är tämligen robust och fungerar bra i de flesta fall.

En enkel jämförelse

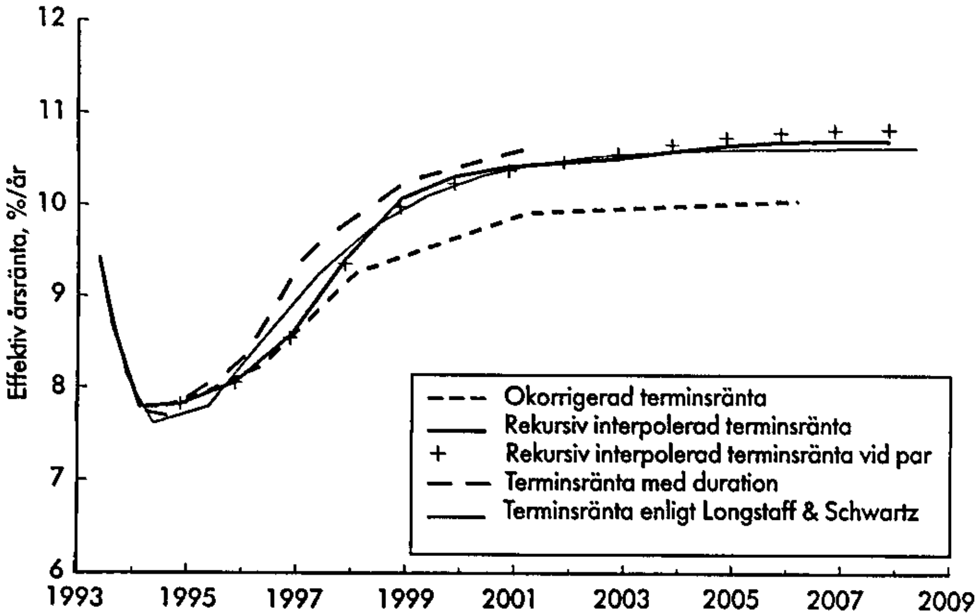
En enkel jämförelse av de tre ovanstående metoderna görs i *Figur 1,* som visar svenska terminsräntekurvor den 17 maj 1993. Kurvorna har beräknats utifrån dagslåneräntan, 180 och 360 dagars statsskuldväxlar samt obligationslånen 199, 202, 1020, 1028, 1033 och 1034.[3] Den kortstreckade kurvan visar okorrigerade terminsräntor, den långstreckade visar terminsräntor med duration, och den tjocka heldragna visar terminsräntor beräknade med den mer exakta metoden, den rekursiva metoden med interpolation. Vi ser att den mer exakta metoden ger terminsräntor som ligger mellan den okorrigerade och den med duration. Den svenska avkastningskurvan är uppåtlutande för förfall efter 1995, och vi ser att den okorrigerade metoden då leder till en underskattning av terminsräntan medan durationsmetoden leder till en överskattning. Vi ser också att den okorrigerade metoden är en bra approximation till den rekursiva metoden (och en bättre approximation till denna än durationsmetoden) fram till omkring 1998, medan durationsmetoden för dessa data tycks bättre överensstämma med den rekursiva metoden för längre löptider. Att okorrigerade terminsräntor stämmer bättre med den rekursiva metoden än terminsräntor med duration måste för många vara något förvånande.

Utifrån ett antal jämförelser för olika affärsdagar och några simuleringar med samstämmiga resultat drar jag slutsatsen att för åren närmast efter 1995 (som kan-

[2] Svenska samtida ekonomer tycks inte ha förstått att uppskatta originaliteten i Tönu Puus avhandling. Det framstår som olyckligt och ofortjänt att den inte fick översättningsbidrag och en internationell publicering.

[3] Lån 1030 har uteslutits då det ger upphov till en mycket ojämn terminsräntekurva. Lånet skiljer sig från de övriga genom att det har en särskilt hög kupong. Se vidare nedan.

Figur 1 **Terminsräntor, 1993-05-17.**



ske är av störst intresse från penningpolitisk synpunkt) är det bättre att vid enkla beräkningar använda okorrigerade terminsräntor än de terminsräntor med duration som utnyttjades i Svensson [1993b]. Eftersom okorrigerade terminsräntor vid uppåtlutande avkastningskurva underskattar terminsräntorna innebär de dessutom en mer försiktig beräkning (de leder t ex till en underskattning av den förväntade inflationstakten). Eftersom den rekursiva metoden med interpolation är mer exakt utan att vara särskilt mycket mer komplicerad är det emellertid förstås bättre att använda den. De mer sofistikerade metoder med skattning av diskonteringsfuntionen som nämns nedan kräver något omständligare beräkningar men är mer teoretiskt tillfredställande.

Den rekursiva metoden med och utan antagande om par

Den tjocka heldragna kurvan i *Figur 1* visar som sagts resultatet av den rekursiva metoden när de hypotetiska kupongerna konstruerats med interpolation av de faktiska kupongerna. Att interpolera kupongerna på detta sätt är förstås tämligen godtyckligt – det bygger på ett antagande att kupongerna bör vara kontinuerliga i förfallodagen.[4]

Terminsräntorna tycks dock inte vara särskilt känsliga för kupongerna. Korsen på och i närheten av den heldragna kurvan visar terminsräntorna om man antar att kupongerna överensstämmer med de effektiva räntorna, och alltså att de hypotetiska obligationerna är parobligationer. I motsats till vad Puu [1993] hävdar blir

---

[4] Detta behöver förstås inte vara fallet, men det är det om utestående obligationer hade samma loptid när de forst emitterades och om de då emitterades till par. Då återspeglar förstås kupongerna som funktion av förfallodagen ränteläget vid den första emissionen (med en tidsförskjutning motsvarande förfallodagen minus löptiden vid forsta emissionen).

avvikelsen tämligen liten, i varje fall med dessa faktiska skillnader mellan kuponger och effektiva räntor.

Skattning av diskonteringsfunktionen

Att interpolera avkastningskurvan är inte helt tillfredsställande ur teoretisk synvinkel, eftersom den effektiva räntan beror på kupongerna, och eftersom avkastningskurvan endast är indirekt relaterad till grundläggande begrepp i ekonomisk teori. Den teoretiskt mest tillfredsställande metoden att beräkna terminsräntor skattar istället direkt diskonteringsfunktionen, dvs nollkupongpriserna, istället för att gå omvägen via skattning eller interpolation av avkastningskurvan. Metoden introducerades av McCulloch [1971, 1975], som approximerade diskonteringsfunktionen med en s k kubisk spline och då kunde formulera problemet som en linjär regression. Metoden är dock förenad med vissa problem. Den leder ofta till instabila estimat av terminsräntorna för de längst bort liggande förfallodagarna.[5]

Diskonteringsfunktionen skattas också med andra funktionsformer än en kubisk spline. En teoretisk modell av terminsräntor som utvecklats av Longstaff och Schwartz [1992] är särskilt intressant.[6] Den leder till en mycket flexibel funktionsform för nollkupongpriserna med attraktiva egenskaper. T ex blir terminsräntor med förfallodag långt in i framtiden konstanta, vilket undanröjer det problem med instabilitet för långa löptider som ofta uppstår med användning av en kubisk spline enligt McCulloch. Anpassningen av denna funktionsform kräver olinjär optimering, och konvergeringsegenskaperna är inte utredda. Metoden tycks emellertid efter några preliminära försök ge mycket bra anpassning till nuvarande svenska data, och avvikelsen mellan skattade och faktiska priser på obligationer och växlar blir mycket liten.[7]

Den tunna heldragna linjen i *Figur 1* visar resultatet av en skattning av terminsräntan med denna metod. Terminsräntan ligger mellan terminsräntorna med den okorrigerade metoden och durationsmetoden, omkring 1997 något högre än med den rekursiva metoden. För senare år är den i det närmaste identisk med den för den rekursiva metoden. Samstämmigheten med den rekursiva metoden verkar betryggande, men säkra slutsatser kräver förstås mer systematiska jämförelser, t ex en Monte-Carlo-studie. För förfallodagar långt fram i tiden närmar sig terminsräntan en konstant nivå, ca 10,6 procent per år. Skattade och faktiska priser och effektiva räntor överenstämmer mycket väl.

Slutsatser

Den rekursiva metoden med olika slags interpolation framstår hittills som tämligen robust, särskilt vid få observationer, även om den inte är helt teoretiskt tillfredsställande. Det är något förvånande att den intuitivt tämligen rimliga durationsmetoden i några fall tycks vara en sämre approximation än den intuitivt naiva okorrigerade metoden. Skattningar av diskonteringsfunktionen med den funktionsform som härletts av Longstaff & Schwartz är teoretiskt attraktiva och verkar praktiskt lovande. De empiriska och beräkningsmässiga egenskaperna är dock ofullständigt utredda. Överensstäm-

---

[5] Det är intressant att skattningen av diskonteringsfunktionen inte tycks påverkas av huruvida lån 1030 utesluts eller medtas. Detta tyder på att McCullochs metod kan hantera obligationer med stor skillnad mellan kupong och avkastningskrav battre än den rekursiva metoden med interpolation.

[6] Svante Johansson har visat mig på Longstaffs och Schwartz' funktionsform och hur den kan utnyttjas.

[7] Banca D'Italia, den italienska centralbanken, beräknar nollkupongkurvor med hjälp av Longstaff & Schwartz funktionsform (Majnoni [1992]).

melsen med den rekursiva metoden tycks vara god.

Om en felmarginal på omkring en halv procentenhet är acceptabel, förefaller det som om de penningpolitiska slutsatser om marknadsförväntningar om framtida räntor, inflation och valutadepreciering som kan dras från en analys av terminsräntekurvor inte är särskilt känsliga för den beräkningsmetod som används. Detta framgår vid en jämförelse av diagrammen i Svensson [1993b] beräknade med olika metoder. För finansiella aktörers prissättning av olika finansiella instrument krävs dock större precision, och då duger bara de mer sofistikerade metoderna.

Referenser

Bank of England [1993a], *Inflation Report, February 1993.* Bank of England, London.

Bank of England [1993b], *Inflation Report, May 1993.* Bank of England, London.

Buono, M, Gregory-Allen, R B & Yaaru U, [1992], "The Efficacy of Term Structure Estimation Techniques: A Monte Carlo Study". *Journal of Fixed Income,* vol 1, nr 4, s 52–63.

Elton, E J & Gruber M J, [1991], *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis.* 4th edition, John Wiley, New York.

Haugen, R A, [1993], *Modern Investment Theory.* 3rd edition, Prentice-Hall, London.

Longstaff, F A, & Schwartz, E S [1993], "Implementation of the Longstaff-Schwartz Interest Rate Model". Working Paper, University of California at Los Angeles, Los Angeles.

Majnoni, G, [1992], "An Empirical Evaluation of One versus Two Factor Models of the Term Structure of Interest Rates: The Longstaff and Schwartz and the CIR Models". Working Paper, Banca D'Italia, Rom.

McCulloch, J H, [1971], "Measuring the Term Structure of Interest Rates". *Journal of Business,* vol 44, nr 1, s 19–31.

McCulloch, J H [1975], "The Tax-Adjusted Yield Curve". *Journal of Finance,* vol 30, nr 3, s 811–830.

Puu, T, [1964], *Studier i det optimala tillgångsvalets teori.* Almqvist & Wiksell, Uppsala.

Puu, T, [1993], "Om samband mellan kort och lång ränta". *Ekonomisk Debatt,* årg 21, nr 5, s 483–488.

Reinhart, V & Klapper, L, [1992], "Understanding the Simple Algebra of Forward Rates". Working Paper, Board of Governors of the Federal Reserve System, Washington.

Shiller, R J, [1990], "The Term structure of Interest Rates". Kapitel 13 i Friedman, B M & Hahn, F H (red), *Handbook of Monetary Economics,* vol I. North-Holland, Amsterdam.

Svensson, L E O, [1993a], "Om skattning av terminsrantor". Utkommer i *Penning- & Valutapolitik* 1993:3.

Svensson, L E O, [1993b], "Terminsräntekurvan, en indikator på marknadsforväntningar om framtida utveckling av räntor, inflation och växelkurs". *Ekonomisk Debatt,* årg 21, nr 3, s 219–234.

Viotti, S & Wissén, P, [1991], *Penningmarknaden.* SNS Förlag, Stockholm.

Weingartner, H M, [1966], "The Generalized Rate of Return". *Journal of Financial and Quantative Analysis,* vol 1, s 1–29.