TÖNU PUU

Om samband mellan kort och lång ränta

I sin artikel i *Ekonomisk Debatt* nyligen använde Lars Svensson [1993] sambandet mellan löptidsstrukturen av marknadens effektiva obligationsräntor och den däri vid fullständigt förutsedd framtid implicerade utvecklingen av korta räntan. Hans slutsats var att den höga förväntade korträntan 1995 och påföljande år vid realistiska antaganden om produktivitetsutvecklingen måste återspegla höga inflationsförväntningar hos allmänheten, vilka borde motverkas med restriktiv politik. Det förhållandet att Lars Svensson är vetenskaplig rådgivare åt Riksbanken gör att hans ord väger tungt. Den så kallade Lindbeckkommissionen har också gjort Lars Svenssons resonemang till en av hörnpelarna för förslagen om restriktiva åtgärder.

Det bör därför ha ett visst allmänintresse att granska fundamentet till slutsatserna om inflationsförväntningarna. Ett logiskt resonemang kan aldrig vara starkare än den svagaste av sina länkar, och jag skall i det följande visa att det förmodade sambandet mellan löptidsstrukturen och de implicerade ränteförväntningarna är så skakigt att resonemanget faktiskt inte håller.

Sambandet i fråga är mycket mer komplicerat än de flesta ekonomer tror. Eftersom jag studerade det i min doktorsavhandling för snart 30 år sedan känner jag mig kallad att något kommentera Lars Svenssons resonemang. Den främsta anledningen till kapitalteorins förvirrade tillstånd är nog den att investeringskalkylerna utvecklades före preferensteorin tillämpad på konsumtion i flerperiodperspektiv. Av och till påpekas det att investeringskalkyler bara har mening i termer av separabilitet av investerings- och konsumtionsbeslut vid perfekt kapitalmarknad, men oftast är kapitalvärden, internräntor och tidscentra för betalningsströmmar begrepp som man fortfarande bara griper till och kombinerar på ett ad hocmässigt sätt utan att tänka på någon bakomliggande konsistent teori.

TÖNU PUU är sedan 1971 professor i nationalekonomi vid Universitetet i Umeå.

När det gäller löptidsstrukturen satte Sir John Hicks 1939 upp en formel för sambandet mellan långa räntan och de under löptiden förekommande korta räntorna på den grunden att alternativa placeringar skall vara likvärdiga. Långa räntefaktorn blir helt enkelt ett geometriskt genomsnitt av de korta. Kalkylerna förutsätter fullständigt förutsedd framtid, men detta är en första abstraktion som alltid görs. Det specifika för Hicks är att resultatet endast gäller om alla lån dessutom bara omfattar två betalningar, en när man köper papperet och en annan när man löser in det eller säljer det dessförinnan.

Friedrich Lutz generaliserade 1940 formeln till mera verklighetstrogna obligationer, sådana som förutom inlösningsbeloppet också avkastar en årlig nominell ränta under löptiden. Eftersom likvärdighet nu förutsätter att också alla förfallna räntekuponger återinvesteras blir sambanden krångligare. Lutz skrev (utan härledning eller bevis) upp en elegant formel, som gav långa räntan som ett något mera komplicerat medelvärde av de korta än det geometriska genomsnittet.

Man har i sammanhanget fyra olika faktorer att ta hänsyn till: återstående löptid för långa kupongobligationer, deras nominella och effektiva räntor, samt den korta räntan (som kan förutsättas ha den enda kupongen inbakad i inlösningsbeloppet och alltså fungerar som vanlig bankränta). Något förvånande trollas den nominella räntan bort för alla obligationer i Lutz formel. Att Hicks kan bli av med nominella räntan är inte så konstigt då den ju är noll. Samma effekt uppnås av Lutz genom en till synes oskyldig förenkling, nämligen förutsättningen att nominella räntan alltid är lika med den effektiva. I stället för obligationer med en faktisk historia av nominella räntor vid olika löptider konstrueras en fiktiv serie, sådan att effektiv och nominell ränta alltid är lika.

Givetvis finns inte något sådant i sinnevärlden. Värre är att förutsättningen innebär att alla obligationer ständigt står i pari, så att den enda löptidsstruktur som i dynamiskt perspektiv är förenlig med förutsättningen är en där alla räntor förblir konstanta över tiden, och det är ju inte något särskilt spännande fall att studera! Richard Musgrave gjorde 1959 mycket för att sprida Lutz formel som konventionell visdom, dock utan att själv fullständigt förstå dess förutsättningar.

I min doktorsavhandling från 1964 rekonstruerade jag Lutz saknade härledning och behandlade också det generella fallet, där man beaktar nominella räntan. Slutsatsen blev att Lutz samband mellan lång ränta och korta ränteförväntningar inte höll exakt ens i kvalitativ mening. Med den tidens hjälpmedel (gröna Facitsnurror) var det emellertid inte möjligt att uppskatta felens storlek.[1]

Efter Lars Svenssons artikel blev jag nyfiken på om försummandet av nominella räntan möjligen kunde betraktas som ett obetydligt fel, som man noga hade undersökt, och slutligen bestämt sig för att negligera. Jag gjorde därför en del kompletterande beräkningar på modern PC. I *Figur 1* visas en räntestruktur över 35 år. Den flackaste kurvan är en löptidsstruktur av effektiva räntor. Den är helt enkelt en bit av en sinuskurva. De två andra kurvorna i *Figur 1*, har bägge grovt sett karaktären av marginalkurva till genomsnittskurva när de jämförs med löptidsstrukturen. De är Hicks och Lutz marginalräntekurvor, den förra mera modest i svängarna den senare något vildare. *Vi noterar hur olika de implicerade ränteförväntningarna är enligt de bägge formlerna.*

I *Figur 2* återkommer löptidsstrukturen

---

[1] Säg att vi har en obligation med t års återstående löptid. Dess kurs betecknas med k_t, dess nominella ränta med r_t och dess effektiva ränta med j_t. Det formella sambandet mellan kurs, effektiv och nominell ränta, samt löptid lyder: $k_t = (r_t / j_t)\,(1-(1+j_t)^{-t}) + (1+j_t)^{-t}$. Känner man kurser och nominalrantor för obligationer av olika löptider, så kan man plotta effektiva räntan mot löptiden och rita upp loptidsstrukturen av effektiva räntor så som i figurerna.

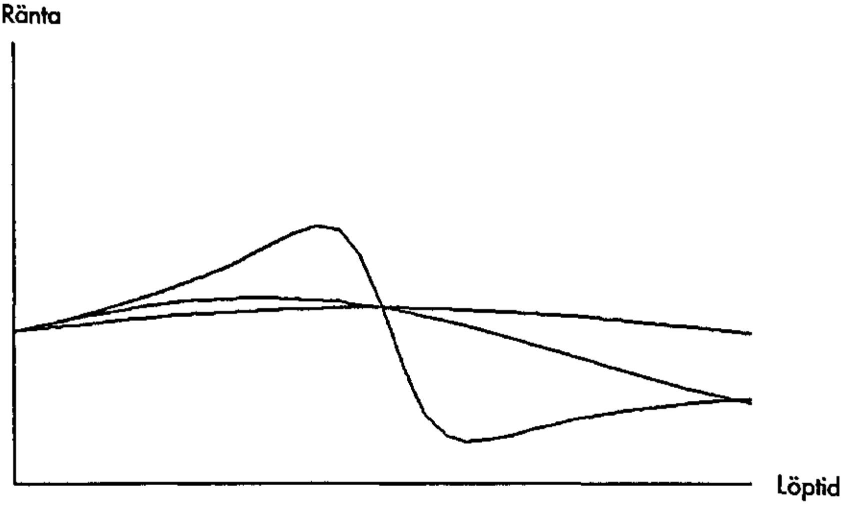
Kalla den korta räntan för ettåriga lån i_t. För att alla placeringsformer skall bli likvärdiga måste man sätta upp en norm sådan att alla inlösningsvärden och förfallna kuponger återinvesteras. Jämförelsestandarden kan enklast ställas upp i termer av återinvestering till den korta räntan, där vi ju inte behöver ta hänsyn till några under löptiden förfallande kuponger som i sin tur skall återinvesteras.

Med hjälp av de korta räntesatserna kan vi så skriva upp formler för nuvärdena av en betalning om t år respektive en ström av sådana betalningar under t år. Nuvärdet av en enda betalning blir $\beta_t = \Pi_{\tau=1}^{\tau=t} (1+i_t)^{-1}$ och nuvärdet av en ström av betalningar blir $\alpha_t = \Sigma_{\tau=1}^{\tau=t} \beta_\tau$. Likvärdigheten för olika låneformer innebär nu att $k_t = r_t\alpha_t + \beta_t$ skall galla.

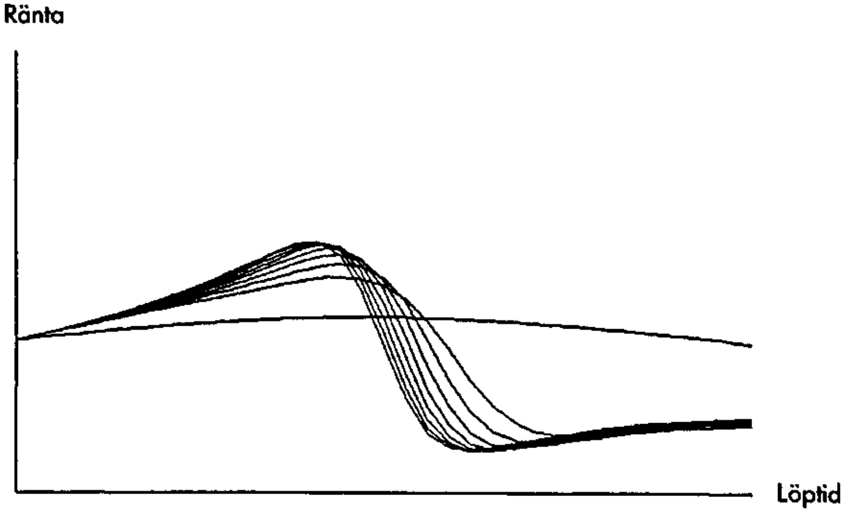
De senaste ekvationerna kan också skrivas rekursivt: $\alpha_t = (k_t + \alpha_{t-1}) / (1+r_t)$, $\beta_t = \alpha_t - \alpha_{t-1}$ och $i_t = \beta_{t-1} / \beta_t - 1$. Beräknar man alltså först kurserna från en antagen löptidsstruktur med hjälp av den första av ekvationerna i denna not, så kan man sedan använda de tre sista rekursiva ekvationerna till att beräkna implicierade ränteförväntningar. Det är så berakningarna för diagrammen har utförts.

Specialfallen enligt Hicks och Lutz får man helt enkelt genom att sätta in $r_t = 0$ respektive $r_t = j_t$ och $k_t = 1$ i formlerna.

Figur 1 **Effektiva räntan för långa obligationer plottad mot löptiden, och implicita förväntningar för korta enligt Hicks och Lutz marginalränteformler.**



Figur 2 **Löptidsstrukturen, och implicita förväntningar vid olika konstanta nominalräntor.**



som referensram men där återges även de implicerade förväntningarna för korta räntor när nominella räntan tas i beaktande och antar olika konstanta värden. Liksom Hicks och Lutz kurvor visar dessa kurvor för konstanta nominella räntor grovt sett ett förhållande som marginalkurva till genomsnittskurva till löptidsstrukturen.

Uppenbart är att de ränteförväntningar som impliceras av löptidsstrukturen visar ett beroende av nominella räntan som inte kan försummas. Resultaten överraskade mig något, för jag hade inte trott att nominella räntans inverkan var så stark.

Tyvärr är situationen besvärligare än så. De riktiga formlerna är differensekvationer av högre ordning med ett fullständigt minne som också omfattar nominella räntorna. Om nominella räntan varierar med löptiden, så blir resultatet ett helt annat än om den är konstant. Ett sätt att simulera den nya situationen är att attribuera nominalräntor till olika löptider med slumptalsgenerator. *Resultatet är förbluffande: man kan inte längre säga någonting alls om ränteförväntningarna!* En sådan simulering är ju inte helt realistisk; nominella räntor varierar inte fullt så slumpmässigt, så jag har inte återgivit det resultatet.

I stället har jag i *Figur 3* avbildat en process där föregående faktiska nominella ränta alltid vägs in med faktorn 80 procent och slumpen bara bidrar med en möjlig förändring med vägningsfaktorn 20 procent. I figuren har, förutom löptidsstrukturen från de föregående figurerna, implicita ränteförväntningar från 500 simuleringar av sådana slumpprocesser med minne prickats in så att de bildar vertikala band. *Bandbredden är uppenbart sådan att man borde vara ytterst försiktig med att dra några som helst slutsatser från löptidsstrukturen utan att ta också hänsyn till nominella räntan.*

Lars Svensson använder nu inte Lutz formel utan utvecklar en alldeles egen metod som också den är värd granskning. Han avstår från Lutz förenkling och låtsas i stället att obligationsmarknadens objekt är kupongiösa i Hicks mening, så att dennes enklare formel blir tillämplig. För att uppnå detta använder Lars Svensson ett annat av Hicks begrepp, vad denne kallade genomsnittlig produktionsperiod, nu döpt till "duration".[2]

För en serie betalningar över en längre tidsperiod, kuponger och inlösningsvärde, väger man betalningstidpunkterna med de till dessa hörande beloppens nuvärden, och beräknar helt enkelt seriens tyngdpunkt över tiden. Sedan ersätter man betalningsserien med en enda utbetalning, nämligen det belopp som kursbeloppet, förräntat med effektiva räntan, har vuxit till vid tidstyngdpunkten. På det viset förvandlas kupongobligationerna till nollkupongare med bara två betalningar, en kostnad när man köper den och en intäkt vid dess tidstyngdpunkt.

Liksom så mycket annat i kapitalteorin blir även denna reduktion av en mångdimensionell betalningsström till två dimensioner, effektiv ränta och duration, knepig. I *Figur 4* visas sambandet mellan återstående löptid och duration vid simulering för olika nominella och effektiva räntor. Durationen blir lika med löptiden om nominella räntan är noll, annars får den ett lägre värde. Hur mycket lägre beror åter på nominella och effektiva räntorna. Vi ser att durationen ändras med en faktor omkring fem beroende på dessa räntesatsers faktiska värden. Man inser att löptiderna förvandlade till durationer kan skyfflas om på ett fullständigt godtyckligt sätt. *Lars Svensson hävdar som speciell förtjänst hos sin metod att man kan ta hänsyn till den exakta tiden på året då varje obligation löses in, men i perspektivet av att durationsberäkningen eljest skyfflar runt löptiderna med tiotals år spelar några månader hit eller dit en helt försumbar roll.*

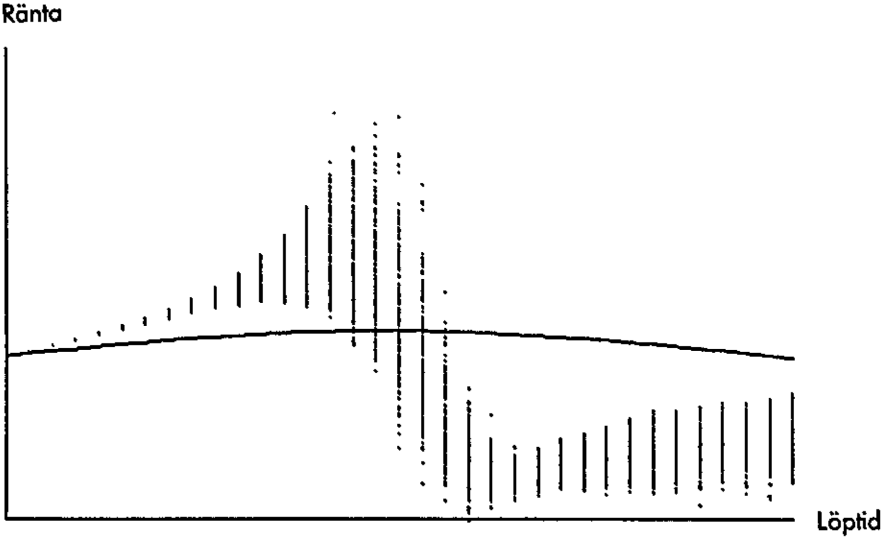
Parentetiskt kan här inskjutas att Kenneth Boulding [1935, 1936] föreslog en annan definition av tidstyngdpunkt för betalningsserier, baserad på ett slags geometriska i stället för aritmetiska tidsgenomsnitt. Beräkningen har helt andra egenskaper än Hicks, och bör ge en fingervisning om det föga självklara i durationsberäkningen.[3]

Ponera att vi har två obligationer: en

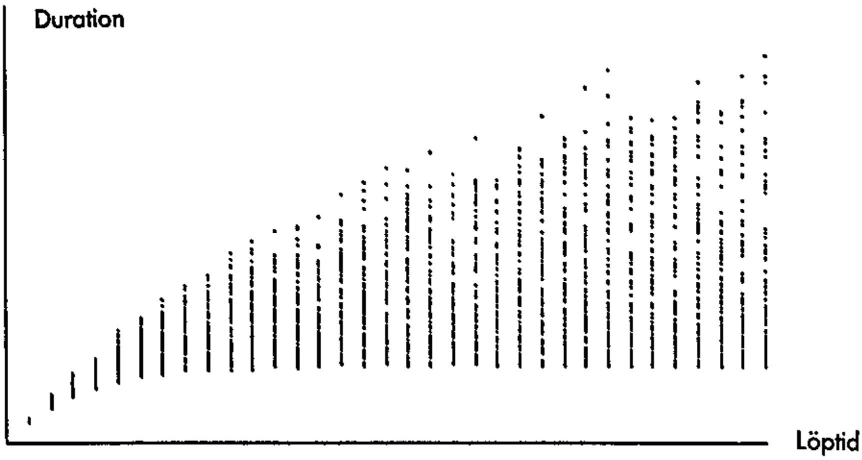
[2] Hicks definition för tidstyngdpunkten p tillämpad på en obligations betalningsserie lyder: $r\sum_{\tau=1}^{\tau=t} \tau(1+j_t)^{-\tau} + (1+j_t)^{-t} = pk_t$ där kursen k_t bestäms så som angivet i den första noten. Summan kan för en obligation med konstant räntekupong till skillnad från en investering i allmänhet lätt beräknas, även om man inte får något direkt elegant uttryck.

[3] Som jämförelse till Hicks produktionsperiod kan vi skriva upp villkoret för Bouldings, som vi även den betecknar med p. Man får: $k_t = (1 + nr)(1+j)^{-p}$ där kursen k_t åter bestäms så som i första noten.

Figur 3 **Löptidsstruktur och förväntningsintervall vid föränderliga nominalräntor.**



Figur 4 **"Duration" som funktion av återstående löptiden simulerad vid olika nominella och effektiva räntor.**



med 10 års löptid, 12 procents nominell och 15 procents effektiv ränta, samt en med 25 års löptid, 20 procents nominell och 25 procents effektiv ränta. Räknat i duration förvandlas den 25-åriga obligationen till 5-årig, och den 10-åriga till 6-årig. Enligt Hicks formel bestäms sedan korta räntan om fem år av de effektiva räntorna på lån som löses in först om 25 respektive 10 år, där det 10-åriga lånet dessutom betraktas som det längre! Intuitivt har jag för min del mycket svårt att acceptera ett sådant räknestycke som meningsfullt.

Saken blir inte mer övertygande om man beaktar följande: Den 25-åriga obligationen i exemplet är egentligen ett löfte om 20 procents kupongränta på inlösningsvärdet under 25 år, och inlösen till fulla värdet efter denna tid. För att effektiva räntan skall bli 25 procent måste obligationen vid inköpstillfället stå i en kurs av 80 procent. Betalningsserien som utlovas och inköpskostnanden är en fast option som man kan ta eller inte.

Effektiva räntan är ett svar på följande hypotetiska fråga: Säg att man placerar 80 kronor på ett bankkonto och under 25 års tid tar ut 20 kronor årligen. Pengarna förräntas med ränta på ränta. Vilken ränta skulle banken betala för att man skall ha exakt 100 kronor kvar när man efter 25 år dödar kontot? Svaret är effektiva räntan 25 procent.

På den ideala bankräkningen utan några uttagsbegränsningar kan man transformera betalningsströmmen på en mängd olika sätt. Bland annat kan man ta ut hela tillgodohavandet vid ett enda tillfälle, till exempel durationstidpunkten om fem år då de 80 kronorna har ackumulerats till 245.

Men det måste samtidigt också finnas en annan ideal bankräkning som ger 15 procents ränta, motsvarande den 10-åriga obligationen, och som gör det möjligt att förvandla dess betalningsserie till ett enda uttag efter 6 år. Bara då blir de hypotetiska uttagen verkliga optioner.

Men när man väl har förvandlat varje obligations intäktsström till en enda betalning vid dess durationstidpunkt, så blir deras betalningar frusna optioner igen, annars kan det ju inte ha någon mening att med hjälp av Hicks formel räkna ut korta räntan på lån som överbryggar tidsspannet mellan de till 5- och 6-åriga förvandlade obligationslånen. Varför skulle någon eljest över huvud taget placera i något annat än den 25-åriga obligation som alltid ger högsta ränta?

I Lars Svenssons värld finns alltså för vissa transaktioner lika många sinsemellan olika perfekta kapitalmarknader i samtidig funktion som det finns obligationer, men ändå inte för andra transaktioner, allt efter som det passar för de handboksformler man för tillfället vill använda.

Referenser

Boulding, K,E, [1935], "The theory of a single investment", *Quarterly Journal of Economics*, vol 49.

Boulding, K,E, [1936], "Time and Investment", *Economica*, vol 3.

Hicks, J,R, [1939], *Value and Capital*, Oxford.

Lutz, F, [1940], "The term structure of interest rates", *Quartely Journal of Economics*, vol 54.

Musgrave, R, [1959], *The Theory of Public Finance*, New York.

Puu, T, [1964], *Studier i det optimala tillgångsvalets teori*, Uppsala.

Svensson, L E O, [1993], "Terminsräntekurvan, en indikator på marknadsförväntningar om framtida utveckling av räntor, inflation och vaxelkurs". *Ekonomisk Debatt*, årg 21, nr 3, s 219–234.