
HANS CARLSSON
INGEMAR STÅHL

John Nash och spelet Hex En julklapp till EDs läsare

Det är i år 50 år sedan John von Neumanns och Oskar Morgensterns banbrytande och omfattande arbete *Theory of Games and Economic Behavior* kom ut. Mottagandet bland fackekonomerna var till att börja med ganska svalt. Martin Shubik berättar i en essä om spelteoriens historia om hur de spelteoretiskt intresserade ekonomerna vid universitetet i Princeton, där såväl Neumann som Morgenstern var professorer, sökte sig över till Institute of Advances Studies och den matematiska institutionen (se Weintraub [1992]).

Genombrottet för spelteori kom i slutet av 1940-talet då det kalla kriget började bli verklighet och USA inte längre hade ett kärnvapenmonopol. Det amerikanska flygvapnets forskningsinstitut RAND Corporation i Santa Monica utanför Los Angeles började ett mycket omfattande forskningsprogram i spelteori. Flera av matematikerna från Princeton-universitetet blev engagerade: först och främst von Neumann men också några yngre matematiker som Albert Tucker

(den person som i ett föredrag i april 1950 första gången presenterade "Fångarnas dilemma"), Harold Kuhn (som senare tillsammans med Tucker presenterade Kuhn-Tucker-lösningen inom icke-linjär programmering) samt den unge doktoranden John Nash. Bland konsulterna vid Rand Corporation återfanns också många yngre ekonomer och matematiskt orienterade samhällsvetare. På listan finns Kenneth Arrow, Armon Alchian, Georg Dantzig, Duncan Luce, Anatol Rapoport, Lloyd Shapley och Martin Shubik. Thomas Schelling kom något senare.

De problem som spelteoretikerna vid RAND Corporation främst kom att arbeta med var utvecklingen av den rena teorin och tillämpningar på två områden – dueller exempelvis mellan jaktplan och den strategiska balansen med ömsesidig vedergällningsförmåga mellan kärnvapenmakterna. De senare studierna blev mest kända genom Herman Kahns studier om det totala vätebombskriget. I denna martialiska miljö spelades ett mer oskyldigt men matematiskt intressant spel som i sin kommersiella form kom att kallas Hex. Den person som lanserade detta spel var John Nash och spelet kallades i den inre kretsen för John (efter John Nash eller John von Neumann, möjligen också med hänvisning till att det kan spelas på hexagonala rutor i ett "bathroom").

Samma spel hade utvecklats av Piet

HANS CARLSSON är docent och INGEMAR STÅHL professor vid Nationalekonomiska institutionen, Lunds universitet. Ståhl är ledamot av priskommittén.

Hein – den danske fysikern och poeten – under andra världskriget och lär ha spelats vid Bohr-institutet i Köpenhamn. Återupptäckten av Nash förefaller enligt källorna att ha varit oberoende (se Gardner [1969]).

Spelet är mycket enkelt. Utgångspunkten är en spelplan uppbyggd av hexagonala rutor där spelarna, Vit och Svart, tilldelas vardera två motstående sidor (se figur; notera att en hörnruta gränsar mot två sidor). Vit börjar med att markera en ruta (med en vit spelmark; eller ett x). Sedan markerar Svart en ruta (med en svart mark eller ett o, osv. Markeringar får göras var som helst men redan markerade rutor får inte väljas. En spelare har vunnit när de rutor han markerat bildar en sammanhängande väg – som inte behöver vara rak – mellan hans båda sidor.

Standardplanen är 11×11 som i figuren, men storleken kan väljas godtyckligt. Spelet kan också generaliseras till ett godtyckligt antal spelare och dimensioner. För nybörjare kan det vara lämpligt att välja mindre spelplaner. Om spelplanen är mycket liten, blir spelet trivalt; i 3×3 exempelvis vinner Vit genom att först inta mittrutan. Redan i något större spel såsom 7×7 upptäcker man snart att det inte finns någon enkel vinnande strategi. Det är ofta en fördel att göra indirekta blockeringar, dvs att inta rutor som inte direkt gränsar till rutor motspelaren redan markerat.

John Nash visade att spelet alltid – oberoende av planens storlek – har en lösning där Vit vinner. Beviset för detta kan delas in i tre delar (jfr Binmore [1992]):

- (i) Om hela spelplanen är fylld med marker måste någon spelare ha en sammanhängande länk mellan sina båda sidor.
- (ii) Om en spelare har en sådan länk kan den andre inte ha det.
- (iii) Det är ingen nackdel att börja: Svart kan inte ha en vinnande strategi.

Sammantaget ger detta att Vit har en vinnande strategi. Punkterna (ii) och (iii) är tämligen självklara. Punkt (i) är också ganska intuitiv men inte helt lätt att visa formellt. Matematikern och ekonomen David Gale [1959] har visat att denna del av beviset är ekvivalent med Brouwers fixpunktsats som används för att bevisa existens av lösningar såväl i allmän jämviktsteori som i spelteorin. Nash själv använde en närliggande fixpunktssats när han visade att ett godtyckligt spel alltid har en jämviktspunkt. Notera att dessa resultat bara visar existens; de visar inte hur man kan finna en lösning. Detta betraktas i allmänhet som en nackdel, men i fallet Hex måste det anses som en förtjänst: vetskapen att Vit har en vinnande strategi stör inte spelglädjen så länge vi inte vet hur denna strategi ser ut.

Referenser

- Binmore, K, [1992], *Fun and Games, A Text on Game Theory*. D C Heath and Company.
- Gale, D, [1959], "The Game of Hex and The Brouwer Fixed-point Theorem". *American Mathematical Monthly*, s 818–827.
- Gardner, M, [1969], *Mathematic Puzzles and Diversions*. Simon and Schuster (omtryck i Penguin Books 1991).
- Poundstone, W, [1992], *Prisoners Dilemma – John von Neumann, Game Theory and the Puzzle of the Bomb*. Doubleday.
- Weintraub, E R (utg), [1992], "Toward a History of Game Theory". Annual Supplement to Vol 24. *History of Political Economy*. Duke University Press, Durham and London.

Spela Hex i helgen – här är en spelplan!

